• Ούλοφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
• Θεοδάμαντος 2
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 180
• Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551

Λύσεις θεμάτων Πανελληνίων 10/6/2014

ΘΕΜΑ Α

Α1. γ

Α2. β

Α3. γ

Α4. β

Α5. Α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή απάντηση: **iii**

Το πλάτος ταλάντωσης του σώματος 1 πριν την κρούση είναι $A_1 = d$, οπότε η ταχύτητα του πριν την κρούση είναι: $\upsilon_1 = \omega_1 \cdot A_1 \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot A_1$.

Εφαρμόζοντας Α.Δ.Ο. για την κρούση των δύο σωμάτων:

$$\vec{p_1} = \vec{p_1'} + \vec{p_2'} \xrightarrow{(+)} m \cdot \upsilon_1 = (m+m)\upsilon_\kappa \Rightarrow \upsilon_\kappa = \frac{\upsilon_1}{2}$$

Η θέση της κρούσης είναι και η νέα θέση ισορροπίας για το συσ/μα, οπότε:

$$\upsilon_\kappa = \upsilon_{\max} \Rightarrow \omega \cdot A_2 = \frac{\upsilon_1}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{2k}{2m}} \cdot A_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot A_1 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} \cdot A_1 \Rightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2} = 2}$$

Β2. Σωστή απάντηση: **ii**

$$T_\Delta = \frac{1}{|f_1 - f_2|} \overset{f_1 > f_2}{\Rightarrow} 2 = \frac{1}{f_1 - f_2} \Rightarrow f_1 - f_2 = 0,5 (1)$$

$$f_{\tau\alpha\lambda.} = \frac{N}{t} \Rightarrow \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{N}{t} \overset{t = T_\Delta}{\Rightarrow} f_1 + f_2 = 200 (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2 f_1 = 200,5 \Rightarrow \boxed{f_1 = 100,25\, Hz} \xrightarrow{(1)} \boxed{f_2 = 99,75\, Hz}$$

Β3. Σωστή απάντηση: **iii**

Για την κεντρική και ελαστική κρούση των δύο σφαιρών έχουμε:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 (1) \;\kappa\alpha\iota\; \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 (2)$$

Η σφαίρα 1 αλλάζει φορά κίνησης (προς τα αριστερά) ενώ η σφαίρα 2 ξεκινά να κινείται προς τον τοίχο

Επειδή η σφαίρα 2 συγκρούεται ελαστικά με τον τοίχο (ακίνητο σώμα πολύ μεγάλης μάζας) ανακλάται αλλάζοντας φορά κίνησης (προς τα αριστερά) αλλά διατηρώντας το ίδιο μέτρο ταχύτητας $\upsilon_2'' = -\upsilon_2' (3)$.

Προκειμένου να παραμένει η απόσταση των δύο σφαιρών μετά την σύγκρουση της m_2 με τον τοίχο σταθερή, θα πρέπει κινούνται ισοταχώς με ίδια φορά, δηλαδή:

$$\upsilon_1' = \upsilon_2'' \xrightarrow{(1),(2),(3)} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = -\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 \Rightarrow m_1 - m_2 = -2m_1 \Rightarrow 3m_1 = m_2 \Rightarrow \boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι το κύμα από την πηγή Π_2 φτάνει στο σημείο Σ τη χρονική στιγμή $t_{2\Sigma} = 0,2s$ ενώ από την πηγή Π_1 φτάνει τη χρονική στιγμή $t_{1\Sigma} = 1,4s$ οπότε και αρχίζει η συμβολή των κυμάτων. Επίσης το πλάτος ταλάντωσης των πηγών είναι $A = 5\cdot 10^{-3}m$ και το πλάτος ταλάντωσης λόγω συμβολής είναι $A' = 2A = 10^{-2}m$. Οι αποστάσεις από τις πηγές θα είναι:
$r_1 = \upsilon\cdot t_{1\Sigma} \Rightarrow \boxed{r_1 = 7m}$ και $r_2 = \upsilon\cdot t_{2\Sigma} \Rightarrow \boxed{r_2 = 1m}$

Γ2. Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι $\Delta t = t_{1\Sigma} - t_{2\Sigma} = 1,4s - 0,2s = 1,2s$ και $\Delta t = 3T \Rightarrow T = 0,4s \rightarrow f = \frac{1}{T} = 2,5Hz \rightarrow \omega = 2\pi f = 5\pi\frac{rad}{s}$.

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματική έχουμε: $\upsilon = \lambda\cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{\upsilon}{f} = 2m$

Μέχρι να φτάσει το κύμα από την πηγή Π_2 το σημείο Σ δεν ταλαντώνεται.
Η απομάκρυνση του σημείου Σ όταν θα έχει φτάσει το κύμα από την πηγή Π_2 είναι:

$$y_2 = A\cdot\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right) \Rightarrow y_2 = 5\cdot 10^{-3}\cdot\eta\mu(5\pi t - \pi)\ S.I.$$

Η απομάκρυνση του σημείου Σ όταν θα έχουν συμβάλλει τα κύματα είναι:

$$y_{o\lambda} = 2A\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)\right)\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right) \Rightarrow y_{o\lambda} = 10^{-2}\cdot\sigma\upsilon\nu(3\pi)\eta\mu(5\pi t - 4\pi) \Rightarrow$$

$$y_{o\lambda} = 10^{-2}\cdot\sigma\upsilon\nu(3\pi)\eta\mu(5\pi t - 4\pi) \Rightarrow y_{o\lambda} = -10^{-2}\cdot(5\pi t - 4\pi)\ S.I.$$

$$\text{Άρα } y_\Sigma = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le 0,2s \\ 5\cdot 10^{-3}\cdot\eta\mu(5\pi t - \pi) & 0,2s \le t < 1,4s \\ -10^{-2}\cdot\eta\mu(5\pi t - 4\pi) & t \ge 1,4s \end{cases}$$

Γ3. Το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης υπολογίζεται από την ΑΔΕΤ:

$$E = K + U \Rightarrow v = \omega\sqrt{(2A)^2 - y^2} \Rightarrow \boxed{v = 25\cdot 10^{-3}\pi\frac{m}{s}}$$

Γ4. Για τη νέα συχνότητα ισχύει: $f_2 = \frac{10}{9}f_1$. Αντίστοιχα για τη νέα κυκλική συχνότητα ισχύει:

$\omega_2 = 2\pi f_2 = 2\pi\frac{10}{9}f_1 \Rightarrow \omega_2 = \frac{10}{9}\omega_1$. Για το νέο μήκος κύματος έχουμε:

$f_2 = \frac{10}{9}f_1 \Rightarrow \frac{\upsilon}{\lambda_2} = \frac{10}{9}\frac{\upsilon}{\lambda_1} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{9}{10}\lambda_1$. Για το νέο πλάτος ταλάντωσης του σημείου Σ έχουμε:

$$A_\Sigma'' = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{\lambda_2}(r_1 - r_2)\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{10\pi}{3}\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right| = 2A\frac{1}{2} \Rightarrow A_\Sigma'' = A$$

Για το λόγο των μέγιστων κινητικών ενεργειών του σημείου Σ έχουμε:

• Ούλοφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
• Θεοδάμαντος 2
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 180
• Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551

Φροντιστήριο Εν δυνάμει
www.en-dynamei.gr

$$\frac{K_1}{K_2}=\frac{1/2\,mv_{1\max}^2}{1/2\,mv_{2\max}^2}=\frac{\omega_1^2(2A)^2}{\omega_2^2A^2}=\frac{81\cdot 4}{100}\Rightarrow\boxed{\frac{K_1}{K_2}=\frac{81}{25}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από την ισορροπία της ράβδου έχουμε:

$\Sigma F_x=0\Rightarrow T=F_x$ (1)

$\Sigma F_y=0\Rightarrow F_y=Mg=56N$ (2)

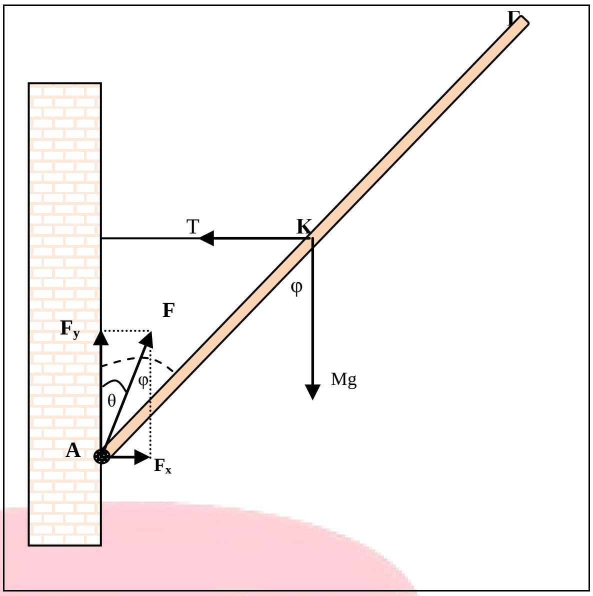
$\Sigma\tau_A=0\Rightarrow\tau_T-\tau_{Mg}=0\Rightarrow$

$T\dfrac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi-Mg\dfrac{\ell}{2}\eta\mu\varphi=0\Rightarrow T=42N$

από $(1)\Rightarrow F_x=42N$

Για το μέτρο της δύναμης της άρθρωσης έχουμε: $F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}\Rightarrow\boxed{F=70N}$

Για την κατεύθυνση της δύναμης άρθρωσης έχουμε: $\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{F_x}{F_y}=\dfrac{42}{56}\Rightarrow\boxed{\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{3}{4}}$



Δ2. Επειδή η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει $a_{cm}=r\cdot a_{\gamma\omega\nu}$

ΘΝΜ: $\Sigma F_x=m\cdot a_{cm}\Rightarrow mg\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi-T_S=m\cdot a_{cm}$ (3)

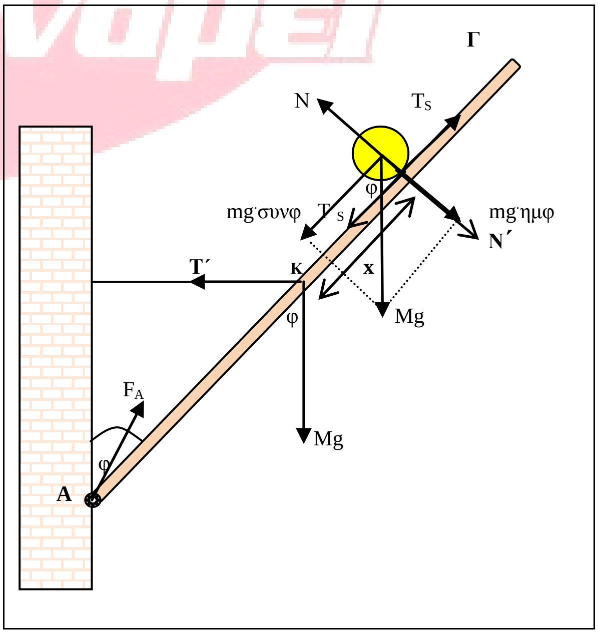
ΘΝΣ: $\Sigma\tau=I_{\sigma\varphi}\cdot a_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow\tau_{Ts}=I_{\sigma\varphi}\cdot a_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow$

$T_S\cdot r=\dfrac{2}{5}mr^2\cdot a_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow$

$T_S=\dfrac{2}{5}mr\cdot a_{\gamma\omega\nu}\Rightarrow T_S=\dfrac{2}{5}ma_{cm}$ (4)

$(3)+(4)\Rightarrow mg\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi=\dfrac{5}{7}m\cdot a_{cm}\Rightarrow a_{cm}=\dfrac{7}{5}g\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi\Rightarrow$

$a_{cm}=\dfrac{40}{7}\dfrac{m}{s^2}\rightarrow a_{\gamma\omega\nu}=\dfrac{a_{cm}}{r}\Rightarrow\boxed{a_{\gamma\omega\nu}=400\dfrac{rad}{s^2}}$



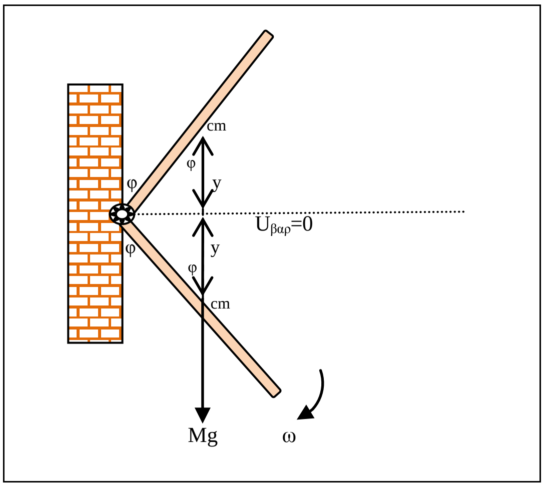
Δ3. Στη δοκό ασκούνται οι παρακάτω δυνάμεις:
το βάρος της $M\vec{g}$, η τάση του νήματος $\vec{T}'$, η δύναμη της άρθρωσης $\vec{F}_A$, η $\vec{N}'$ (αντίδραση της $\vec{N}$) και η $\vec{T}_S'$ (αντίδραση της $\vec{T}_S$)

Από την ισορροπία της δοκού έχουμε: $\Sigma\tau_A'=0\Rightarrow\tau_{T'}'-\tau_{Mg}-\tau_{N'}=0\Rightarrow$

όμως κατά μέτρο $N'=N$ και για τη σφαίρα $\Sigma F_y=0\Rightarrow N=mg\cdot\eta\mu\varphi$ άρα $N'=N=mg\cdot\eta\mu\varphi$

$$\Rightarrow T'\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi - Mg\frac{\ell}{2}\eta\mu\varphi - mg\left(\frac{\ell}{2}+x\right)\cdot\eta\mu\varphi = 0 \Rightarrow \boxed{T' = 45+3\cdot x \;\; S.I.}$$

Δ4. Ο ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας υπολογίζεται από τον τύπο: $\frac{dK}{dt} = \Sigma\tau\cdot\omega = \tau_{Mg}\cdot\omega$ (5)



όπου $\tau_{Mg} = Mg\cdot\eta\mu\varphi = 33{,}6\,N\cdot m$.

Η γωνιακή ταχύτητα υπολογίζεται εφαρμόζοντας ΑΔΜΕ: $E_{MHX,\alpha\rho\chi} = E_{MHX,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow \cancel{K}^{0}_{\alpha\rho\chi} + U_{\alpha\rho\chi} = K_{\tau\varepsilon\lambda} + U_{\tau\varepsilon\lambda}$

$$\Rightarrow Mg\cdot y = \frac{1}{2}I_\rho\cdot\omega^2 - Mg\cdot y \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{3}L\ell^2\cdot\omega^2 = 2Mg\cdot y$$

όπου $y = \frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{3}L\ell^2\cdot\omega^2 = 2Mg\cdot\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{6g\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi}{\ell}} \Rightarrow \omega = \sqrt{24}\,\frac{rad}{s} = 2\sqrt{6}\,\frac{rad}{s}$$

Από (5) $\Rightarrow \frac{dK}{dt} = 33{,}6\cdot 2\sqrt{6}\,\frac{J}{s} \Rightarrow \boxed{\frac{dK}{dt} = 67{,}2\cdot\sqrt{6}\,\frac{J}{s}}$

Δ5. Στην κρούση των δύο ράβδων εφαρμόζουμε ΑΔΣ $\left(dt\to 0\,,\ \Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi} = \vec{0}\right)$

$$\vec{L}_{o\lambda,\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{o\lambda,\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow \vec{L}_\rho = \vec{L}_{\kappa o\iota\nu\acute{\eta}} \Rightarrow L_\rho = L_{\kappa o\iota\nu\acute{\eta}} \Rightarrow I_\rho\cdot\omega = I_{o\lambda}\cdot\omega_\kappa \Rightarrow \omega_\kappa = \frac{I_\rho\cdot\omega}{I_{o\lambda}} \quad (6)$$

Ισχύει $I_{o\lambda} = I_\rho + I'_\rho$ όπου $I_\rho = \frac{1}{3}M\ell^2$ και $I'_\rho = \frac{1}{3}M'\ell^2 = \frac{1}{3}3M\ell^2 = 3I_\rho$ άρα $I_{o\lambda} = 4I_\rho$

Από (6) $\Rightarrow \omega_\kappa = \frac{I_\rho\cdot\omega}{4I_\rho} \Rightarrow \omega_\kappa = \frac{\omega}{4}$

Το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\pi = \frac{\Delta K}{K_{\alpha\rho\chi}}100\% = \frac{K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}}{K_{\alpha\rho\chi}}100\% = \left(\frac{K_{\tau\varepsilon\lambda}}{K_{\alpha\rho\chi}}-1\right)100\% = \left(\frac{1/2\,I_{o\lambda}\cdot\omega_\kappa^2}{1/2\,I_\rho\cdot\omega^2}-1\right)100\% \Rightarrow$$

$$\pi = \left(\frac{4I_\rho\cdot\frac{\omega^2}{16}}{I_\rho\cdot\omega^2}-1\right)100\% = \left(\frac{1}{4}-1\right)100\% \Rightarrow \pi = -75\% < 0$$

Άρα το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας του συστήματος είναι **75%**